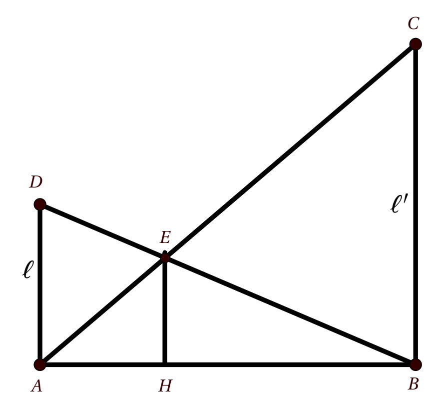
Thème : géométrie plane

L'exercice

On considère un trapèze rectangle ABCD de bases [AD] et [BC].

- Les longueurs des segments [AD] et [BC] sont fixes et respectivement notées ℓ et ℓ'.
- E est le point d'intersection des segments [AC] et [BD].
- H est le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).

Lucas affirme : « En rapprochant les points A et B, je peux diminuer la distance EH. » A-t-il raison ?



Les réponses de trois élèves de seconde

Élève 1

A l'aide d'un logiciel de géométrie, j'ai vu que le point E reste à la même hauteur mais je ne sais pas le prouver. Donc Lucas aurait peut-être tort.

Élève 2

J'ai utilisé le théorème de Thalès : (EH) // (BC) donc $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{EH}{BC}$

Si la longueur AB diminue alors AH diminue et la distance EH aussi puisque BC est fixe.
Lucas a raison.

Élève 3

Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, *la droite (AC) a pour équation :* $y = \ell' x$.
La droite (BD) a pour équation : $y = 1 - x$. *J'ai résolu l'équation :* $\ell' x = 1 - x$.
J'en déduis les coordonnées du point E $\left(\dfrac{1}{1+\ell'}\,;\dfrac{\ell'}{1+\ell'}\right)$.
Donc le point E est fixe et Lucas a tort.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les réponses de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices, un au niveau du lycée et un au niveau du collège, sur le thème *géométrie plane* permettant notamment de développer la compétence « chercher ».

Thème : arithmétique

L'exercice

Soit n un entier naturel, on définit deux entiers a et b par :

$$\begin{cases} a = 4n+1 \\ b = 5n+3 \end{cases}$$

Démontrer que :

$$PGCD(a\,;\,b) = 7 \text{ si et seulement si } n \equiv 5 \pmod 7.$$

Les solutions proposées par trois élèves de terminale scientifique spécialité de mathématiques

Élève 1

Si $n \equiv 5 \pmod 7$ *alors* $n = 7k+5$.

En remplaçant, $\begin{cases} a = 28k+21 \\ b = 35k+28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7(4k+3) \\ b = 7(5k+4) \end{cases}$

Donc 7 divise a et b et puisque $4(5k+4) - 5(4k+3) = 1$, *on en déduit que* $PGCD(a\,;\,b) = 7$.

Élève 2

Si $PGCD(a\,;\,b) = 7$ *alors* $4n+1 \equiv 0 \pmod 7$ *soit* $4n \equiv 6 \pmod 7$.

Comme $2 \times 4 \equiv 1 \pmod 7$, $4n \equiv 6 \pmod 7 \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod 7$.

Élève 3

$4b - 5a = 7$ *donc* $PGCD(a\,;\,b)$ *est soit égal à* 1, *soit égal à* 7.

D'après ce tableau de congruences, j'obtiens l'équivalence.

$n \equiv \ldots \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$4n+1 \equiv \ldots \pmod 7$	1	5	2	5	3	0	4
$5n+3 \equiv \ldots \pmod 7$	3	1	6	4	2	0	5

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous proposerez des aides adaptées à chacun des élèves.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité de mathématiques.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *arithmétique*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices sera choisi pour modéliser une situation extérieure aux mathématiques.



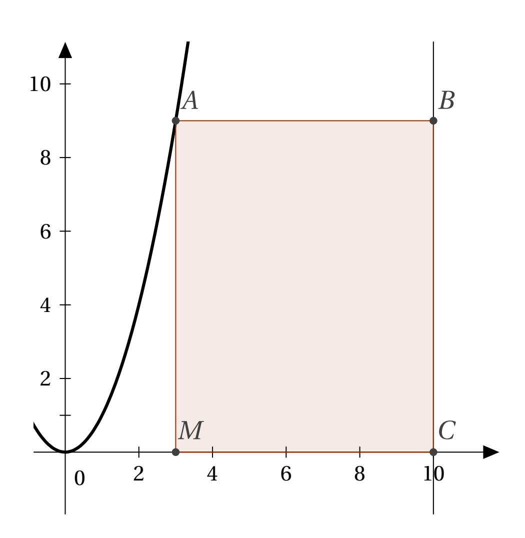
Thème : optimisation

L'exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la droite d d'équation $x = 10$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction carré. Pour tout point M de coordonnées $(x\ ;\ 0)$ avec x réel compris entre 0 et 10, on construit le rectangle $ABCM$ comme sur la figure ci-contre.

Déterminer, si elle existe, une position du point M rendant l'aire du rectangle $ABCM$ maximale.



Les réponses de deux élèves de première S

Élève 1

Lorsque x vaut 0 ou 10, le rectangle est aplati donc son aire est 0.
Par conséquent la position de M qui rend l'aire maximale est pour $x = 5$.

Élève 2

Pour $x = 1$, *je peux calculer les coordonnées de* A *:* $(1\ ;\ 1)$ *et j'en déduis que* $AM = 1$ *et* $MC = 9$. *L'aire vaut alors* $9 \times 1 = 9$.
Pour $x = 2$, *je peux calculer les coordonnées de* A *:* $(2\ ;\ 4)$ *et j'en déduis que* $AM = 4$ *et* $MC = 8$. *L'aire vaut alors* $8 \times 4 = 32$.
Par ce procédé, j'obtiens ce tableau :

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Aire	*9*	*32*	*63*	*96*	*125*	*144*	*147*	*128*	*81*

J'en déduis que la position du point M rendant l'aire du rectangle maximale est pour $x = 7$.

Le travail à exposer devant le jury

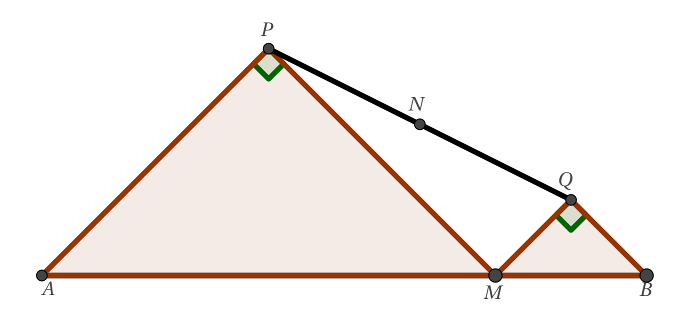
1 – Analysez la production de chacun de ces élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *optimisation*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra permettre de développer la compétence « représenter ».

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice



Le point M appartient au segment [AB] de longueur 8.
On construit deux triangles rectangles et isocèles AMP et BMQ comme illustré sur la figure.
N est le milieu du segment [PQ].
Quel est l'ensemble décrit par le point N lorsque M parcourt le segment [AB] ?

Les réponses de deux élèves de seconde

Élève 1

Avec un logiciel de géométrie, j'ai construit la figure. N varie sur un segment parallèle à $[AB]$. C'est le segment $[PQ]$ lorsque M est au milieu de $[AB]$.

Élève 2

J'ai prolongé les droites (AP) et (BQ) ; elles se coupent en un point C.
Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, M a pour coordonnées $(x\,;0)$; P a pour coordonnées $\left(\frac{x}{2}\,;\frac{x}{2}\right)$ et Q a pour coordonnées $\left(x+\frac{1-x}{2}\,;\frac{1-x}{2}\right)$.
Comme N est le milieu de $[PQ]$, $x_N = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{2x+1}{4}$ et $y_N = \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{1}{4}$.
Donc le point N varie sur la droite d'équation $y = \frac{1}{4}$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les réponses de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices, un au niveau du lycée et un au niveau du collège, sur le thème *problème avec prise d'initiative*, permettant notamment de développer les compétences « chercher » et « raisonner ».

Thème : fonctions

L'exercice

Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \mathrm{e}^x - kx$ où k est un réel quelconque.
Existe-t-il un réel k tel que l'axe des abscisses soit tangent à la courbe représentative de la fonction f_k ?

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai utilisé un logiciel de géométrie dynamique. Pour que la courbe représentative de $f(x) = \mathrm{e}^x - kx$ soit tangente à l'axe des abscisses, il faut que $k = 2,7$.

Élève 2

On sait que la fonction f_k admet une tangente à l'axe des abscisses en a.
On a donc : $f_k'(x) = \mathrm{e}^x - k$ et donc $f_k'(a) = 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^a - k = 0$.
On sait que $f_k(a) = 0$ et $f_k'(a) = 0$ donc $f_k(a) = f_k'(a)$
$\Longrightarrow \mathrm{e}^a - k = \mathrm{e}^a - ka \Longleftrightarrow a = 1$. Maintenant il faudrait trouver k.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez le travail de ces élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *fonctions* permettant notamment de développer les compétences « modéliser » et « calculer ».

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Imaginons qu'une calculatrice comporte une nouvelle touche, nommée ❀, qui double le nombre saisi puis retranche 1. J'entre un nombre x et j'appuie n fois sur cette touche ❀.

1. En fonction de x et n, conjecturer l'expression obtenue après avoir appuyé n fois sur la touche ❀.
2. Démontrer votre conjecture.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

1. *Je trouve* $2x-1$ *après avoir appuyé 1 fois sur* ❀, $4x-1$ *après avoir appuyé 2 fois sur* ❀, $8x-1$ *après avoir appuyé 3 fois sur* ❀.
   Je conjecture qu'après avoir appuyé n fois sur la touche ❀ *on obtient* $2^n x-1$.
2. *Pour* $n=1$ *on a* $2^n x-1=2x-1$, *et si on part de* $2^n x-1$ *alors en appuyant encore une fois sur la touche* ❀ *on obtient* $2\times 2^n x-1$ *donc* $2^{n+1}x-1$. *Ce qui permet d'établir la conjecture.*

Élève 2

1. *Je note* r_n *le résultat obtenu après avoir appuyé n fois sur la touche* ❀.
   Je pars de $r_1=x$, *donc après avoir appuyé 1 fois sur* ❀ *j'obtiens* $r_2=2x-1$.
   Puis $r_3=2r_2-1$ *donc* $r_3=2^2x-2-1$.
   Puis $r_4=2r_3-1$ *donc* $r_4=2^3x-2^2-2-1$.
   On peut conjecturer que : $r_n=2^{n-1}x-2^{n-2}-2^{n-3}-\ldots-2-1$.
2. *Je vais démontrer par récurrence la conjecture ci-dessus.*
   Pour $n=2$ *la formule conjecturée donne :* $r_2=2x-1$ *donc la propriété est vraie au rang 2.*
   Supposons la vraie pour tout entier n fixé, on a alors $r_{n+1}=2r_n-1$
   donc $r_{n+1}=2(2^{n-1}x-2^{n-2}-2^{n-3}-\ldots-2-1)-1$ *donc* $r_{n+1}=2^n x-2^{n-1}-2^{n-2}-\ldots-2-1$.
   Donc la propriété est héréditaire.
   Le principe de récurrence permet alors de dire que la propriété est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration* (un au niveau du collège et un au niveau du lycée) permettant notamment de développer la compétence « communiquer ».

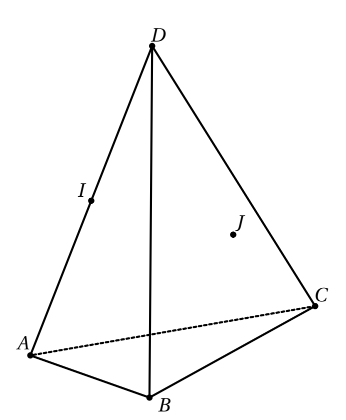


Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

$ABCD$ est un tétraèdre.
I est le milieu du segment $[AD]$.
J est le point de la face BCD défini par :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.$$



1. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
   Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).
2. Sans utiliser de repère, donner une construction du point K.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique à la question 1

Élève 1

On trace les droites (IJ) et (BC), elles sont sécantes en K.
Les coordonnées du point I sont $\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$; celles du point J sont $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.
On trouve une représentation paramétrique de la droite (IJ) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = \frac{1}{2} - t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un réel.}$$

Ensuite je ne sais pas quoi faire.

Élève 2

Avec un logiciel de géométrie dynamique, je vois que le point K est en dehors du triangle ABC.
Je construis le point L intersection de (DJ) et (BC). Le point K est aligné avec les points A et L mais je ne sais pas déterminer les coordonnées de L et le logiciel ne fournit pas ses coordonnées dans le bon repère.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez les conseils que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée, permettant notamment de développer les compétences « représenter » et « raisonner ».

Thème : suites

L'exercice

Pour tout entier naturel n non nul, u_n est le nombre dont l'écriture décimale est donnée par l'expression suivante :

$$u_n = \underbrace{111\dots11}_{n \text{ chiffre(s)}}$$

On définit alors la somme S_n par

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots11}_{n \text{ chiffre(s)}}$$

Par exemple : $u_3 = 111$ et $S_3 = 123$.
Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?

Les réponses de deux élèves de première scientifique

Élève 1

J'ai rédigé le programme suivant en langage Python.
Je l'ai testé avec différentes valeurs de n :
$S_1 = 1$, $S_2 = 12$, $S_3 = 123$, $S_7 = 1234567$.
En juxtaposant tous les entiers inférieurs à n, j'obtiens S_n.

$$S_n = 1234\dots n$$

```
def masuite(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+(10**k-1)/9
    return s
```

Élève 2

J'ai calculé $u_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

En remplaçant dans S_n*, j'obtiens* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9} = \frac{1}{9}\left(\frac{1-10^n}{-9} - \frac{1}{9}\right)$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{81}(10^n - 2)$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les démarches de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *suites* permettant notamment de développer les compétences « chercher » et « calculer ».

Thème : probabilités

L'exercice

Soit $S_0 = 0$, on lance une pièce équilibrée, on pose $\begin{cases} S_1 = S_0 + 1 & \text{si on obtient PILE,} \\ S_1 = S_0 - 1 & \text{si on obtient FACE.} \end{cases}$

En itérant le lancer de pièces, on définit une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$S_0 = 0 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} S_{n+1} = S_n + 1 & \text{si on obtient PILE,} \\ S_{n+1} = S_n - 1 & \text{si on obtient FACE.} \end{cases}$$

Pour tout n entier naturel, on note A_n l'événement « obtenir $S_n = 0$ ».
Quelle est la probabilité de l'événement A_n, pour un entier naturel n non nul donné ?

Les réponses de trois élèves de première scientifique

Élève 1

```
def suitealea(n):
    C=0
    for I in range(10000):
        S=0
        for J in range(n):
            S=S+(2*randint(0,1)-1)
        if S==0:
            C=C+1
    P=C/10000
    return P
```

Pour calculer la probabilité de A_n,
j'ai rédigé un programme en langage Python.
J'ai lancé le programme pour différentes valeurs de n.

n	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
P	*0.5*	*0*	*0.373*	*0*	*0.307*	*0*	*0.279*

Élève 2

Pour S_1 on peut trouver : -1 ; 1 .
Pour S_2 on peut trouver : -2 ; 0 ; 2.
Pour S_3 on peut trouver : -3 ;-1 ; 1 ; 3.
Pour S_4 on peut trouver : -4 ;-2 ; 0 ; 2 ; 4.
Pour S_5 on peut trouver : -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 5.
Donc si n est impair alors $P(A_n) = 0$ et si n est pair alors $P(A_n) = \dfrac{1}{n+1}$.

Élève 3

J'ai construit un arbre pondéré, il me fait penser à la loi binomiale avec n et $p = 0.5$.
Avec l'arbre, j'ai calculé $P(A_2) = 0.5$, $P(A_3) = 0$, $P(A_4) = 0.375$ et $P(A_5) = 0$.
Mais je n'ai pas trouvé le lien entre A_n et la loi binomiale quand n devient grand.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Présentez deux exercices sur le thème *probabilités*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « chercher ».



Thème : proportionnalité

L'exercice

En 2017, une entreprise a produit 10 000 bicyclettes par mois. Suite à une panne, la production de janvier 2018 chute de 10 % par rapport à la production mensuelle de 2017.

1. Quelle augmentation (en pourcentage) faudrait-il réaliser dans le courant du mois de février 2018 par rapport au mois de janvier pour rattraper la production mensuelle de 2017 ?
2. Pour des raisons techniques, il n'est pas possible de rattraper la production mensuelle de 2017.
   En février 2018, l'augmentation de production est de 2 % par rapport au mois précédent.
   En admettant que ce taux d'augmentation demeure constant d'un mois sur l'autre, en quel mois de l'année 2018 ce rattrapage sera-t-il effectif ?

Les réponses de deux élèves

Élève 1

Question 1 *:*
On a baissé de 10 % *il suffit de remonter de* 10 %.
Question 2 *:*
5 fois 2 % *égale* 10 % *donc on rattrape les* 10 000 *au bout de 5 mois.*

Élève 2

Question 1 *:*
On avait 10 000 *en 2017.*
Comme on a perdu 10 %, *on a fabriqué* 9 000 *bicyclettes. Il faut produire* $\frac{1}{9}$ *de plus pour retrouver la production initiale, soit une augmentation de* 11 % *environ.*
Question 2 *:*
On avait 10 000 en 2017 donc $10\,000 - 10\,\% = 9\,000$ *et* 2 % *de* $9\,000 = 180$.
Il faut produire 1 000 *bicyclettes de plus.*
Comme $\frac{1\,000}{180} = 5{,}55$ *au bout de cinq mois on n'aura pas rattrapé mais au bout de* 6 *mois oui.*
Six mois après février ça mène au mois d'août. Mais je ne sais pas si l'usine ferme en août…

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous proposerez des aides adaptées à chacun des élèves.

2 – Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe dont vous préciserez le niveau.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *proportionnalité*, dont un au niveau du lycée. Vous motiverez vos choix selon les deux compétences de l'activité mathématique : « modéliser » et « représenter ».



Thème : Problèmes conduisant à la résolution d'équations

L'exercice

Soit k un réel avec $k > 0$. On considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f_k(x) = x - k\ln(x)$. On note C_k sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Donner, selon les valeurs de k, le nombre de points d'intersection de C_k avec l'axe des abscisses.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

En utilisant un logiciel de géométrie dynamique je trouve que :
Si $0 < k < 2,71$ *alors il n'y a pas de solution.*
Si $k > 2,71$ *alors il y a deux solutions.*

Élève 2

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x}{\ln(x)} = k$.
Je pose $g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ *et j'utilise la fonction* g. *Si* $g(x) = k$ *alors* $g'(x) = 0$. *On calcule :*

$$g'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0$$

donc $x = \mathrm{e}$. *Après je ne vois pas ...*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les démarches de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les conseils que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *problèmes conduisant à la résolution d'équations* dont l'un au moins permettra de modéliser une situation extérieure aux mathématiques.

Thème : probabilités

L'exercice

On choisit au hasard un nombre entier de 0 à 999.
Quelle est la probabilité qu'au moins un de ses chiffres soit strictement supérieur à 5 ?

Les réponses de trois élèves de première scientifique

Élève 1

Il y a 1000 *nombres entre* 0 *et* 999. *Les nombres cherchés sont constitués des chiffres* 6, 7, 8 *et* 9, *ce qui fait quatre possibilités.*
Pour un nombre à trois chiffres, il y en a donc : $4 \times 4 \times 4 = 64$. *Autrement dit,* 64 *nombres parmi* 1000.
La probabilité cherchée est donc $\dfrac{64}{1000}$ *ou* $\dfrac{8}{25}$.

Élève 2

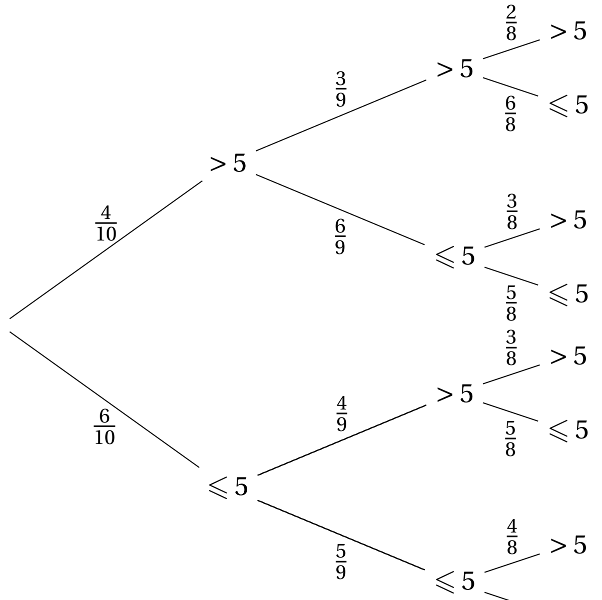
Je vais chercher à dénombrer les nombres qui n'ont pas la propriété demandée.
Parmi les 1000 *nombres considérés, il s'agit des nombres dont les chiffres sont* 0, 1, 2, 3, 4 *ou* 5.
Il y a donc 0 (*ou* 000) *et les nombres formés d'un chiffre entre* 1 *et* 5 *suivi de un ou deux chiffres entre* 0 *et* 5.
Il y en a donc $1 + 5 \times (6^1 + 6^2) = 211$.
La probabilité cherchée est donc $1 - \dfrac{211}{1000} = \dfrac{789}{1000}$.

Élève 3



Il y a 4 chances sur 10 que le premier chiffre soit plus grand que 5 et 6 chances sur 10 qu'il ne le soit pas.
J'ai construit l'arbre ci-contre.
Je trouve donc une probabilité de :

$$1 - \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{6}$$



Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la réponse des trois élèves en mettant en évidence la pertinence de leurs démarches ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Présentez deux exercices sur le thème *probabilités*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. Au moins l'un des exercices devra permettre de travailler la compétence « chercher ».

Thème : modélisation

L'exercice

Une balle tombe d'une hauteur de 20 mètres. Elle rebondit à chaque fois aux trois quarts de la hauteur précédente. On considère que la balle est immobile dès que la hauteur du rebond est inférieure à 1 mm.

1. Déterminer au bout de combien de rebonds la balle est considérée comme immobile.
2. Déterminer la distance totale parcourue par la balle.

Les réponses de deux élèves de première scientifique

Élève 1

J'ai utilisé une feuille de tableur :

	A	B	C
1	*Hauteur de laquelle la balle tombe (en m)*	*Nombre de rebonds*	*Distance parcourue*
2	*20*	*1*	*20*
3	*15*	*2*	*35*
⋮	⋮	⋮	⋮
36	*0,0011*	*35*	*79,99661*
37	*0,0008*	*36*	*79,99746*

En étirant les cellules vers le bas, je peux déterminer que :

1. *La balle effectue 36 rebonds avant de s'immobiliser.*
2. *Elle aura parcouru une distance d'environ 79,997 mètres.*

Élève 2

J'ai programmé l'algorithme suivant sur ma calculatrice :

```
D ← 20000
H ← 20000
N ← 0
while H > 1 do
    D ← D + 2 * H
    H ← 0,75 * H
    N ← N + 1
end
return (N, D)
```

J'obtiens ces résultats :

1. *La balle effectue 35 rebonds.*
2. *Elle aura parcouru environ 180 mètres.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *modélisation* à des niveaux de classes différents et dont l'un au moins permet notamment de développer la compétence « calculer ».

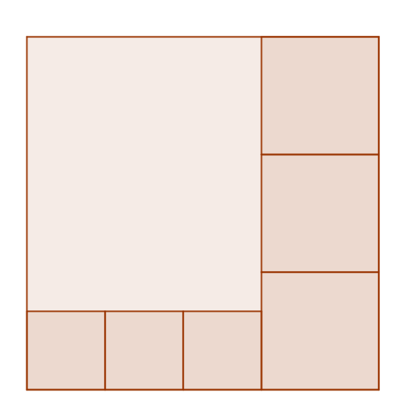
Thème : problèmes avec prise d'initiative

L'exercice

Un jardinier a découpé une parcelle carrée pour y installer 7 massifs de fleurs différents comme sur le schéma ci-contre.

La parcelle a été divisée en trois petits carrés de même taille, trois carrés moyens de même taille et un rectangle. L'aire du rectangle est égale à 378 m^2.

Quelle est l'aire de la parcelle ?



La réponse de deux élèves de seconde

Élève 1

J'ai trouvé que $378 = 21 \times 18$, *le côté d'un petit carré est donc égal à* $\frac{18}{3} = 6$.

De plus le côté d'un carré moyen est $6 \times \frac{3}{2} = 9$ *car 2 carrés moyens c'est la même chose que 3 petits carrés.*

Je vérifie qu'avec les longueurs trouvées, la parcelle est bien un carré : $3 \times 6 + 9 = 27$ *et* $3 \times 9 = 27$.

La parcelle a donc une aire de $27^2 = 729\ m^2$.

Élève 2

La largeur du rectangle ne peut pas dépasser 19 m (une largeur est plus petite qu'une longueur).
J'ai créé une feuille de calcul où je teste toutes les largeurs possibles du rectangle entre 1 et 19.
Je calcule alors la longueur du rectangle correspondante et les côtés des carrés.
Dans la dernière colonne, je déduis l'aire de la parcelle en faisant la somme des aires des sept massifs la composant. En E2 j'ai tapé la formule suivante, puis je l'ai recopiée vers le bas :

$$= A2 * B2 + 3 * C2 * C2 + 3 * D2 * D2$$

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
1	*largeur rectangle*	*longueur rectangle*	*côté d'un petit carré*	*côté d'un carré moyen*	*aire parcelle*
2	1	378,0	0,33	0,5	379,083 333
3	2	189,0	0,67	1	382,333 333
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	18	21,0	6,00	9	729
20	19	19,9	6,33	9,5	769,083 333

Je trouve les 19 solutions possibles mais ce sont des valeurs approchées.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices, sur le thème *problèmes avec prise d'initiative* l'un au niveau collège et l'autre au niveau lycée, permettant notamment de développer la compétence « raisonner ».



Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Une espèce protégée d'oiseaux niche sur une île. On a constaté que sa population diminue de 10 % chaque année. Une association tente de limiter cette diminution en introduisant sur l'île 100 oiseaux chaque année. En 2018, on recense 1 600 oiseaux.
À ce rythme, la population passera-t-elle sous la barre des 1 100 oiseaux ? Sous celle des 1 000 oiseaux ? Justifier.

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

	A	B	C	…	S	T	…	FV	FW
1	*Année 2018 + n*	*2018*	*2019*	…	*2035*	*2036*	…	*2194*	*2195*
2	*n*	*0*	*1*	…	*17*	*18*	…	*176*	*177*
3	*oiseaux*	*1600*	*1540*	…	*1100,06309*	*1090,05678*	…	*1000,00001*	*1000*
4	*oiseaux-1000*	*600*	*540*	…	*100,06309*	*90,05678*	…	*0,00001*	*0*

J'ai utilisé un tableur. Je constate que la population d'oiseaux passera en-dessous de la barre des 1100 oiseaux en 2036 et qu'elle atteindra les 1000 oiseaux en 2195 et se stabilisera. Je pense donc qu'elle ne passera pas sous la barre des 1000 oiseaux. Je peux donc retrancher 1000 dans la ligne 4 *et j'obtiens une suite géométrique de raison* $0,9$. *Comme elle tend vers 0, cela prouve ma conjecture.*

Élève 2

J'ai programmé un algorithme sur ma calculatrice.
En donnant à la variable S la valeur 1100, j'obtiens 18 ; j'en déduis que la population passera sous la barre des 1100 oiseaux en 2036.
En donnant à la variable S la valeur 1000, j'obtiens 199 ; j'en déduis que la population passera sous la barre des 1000 oiseaux en 2217.

Élève 3

J'ai utilisé la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \dfrac{10}{100}u_n + 100$.
Le tableau de valeurs de ma calculatrice me permet d'affirmer que la population passera sous la barre des 1100 oiseaux, par exemple en 2037, mais ne passera pas sous la barre des 1000 oiseaux.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée, permettant notamment de développer la compétence « communiquer ».

Thème : arithmétique

L'exercice

Une troupe d'hommes et de femmes a dépensé dans une auberge 1000 sous. Les hommes ont payé 19 sous chacun, les femmes 13. Combien y avait-il d'hommes et de femmes ?

Extrait des *Éléments d'algèbre* d'Euler.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique spécialité mathématiques

Élève 1

Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes, on aura l'équation $19x+13y=1000$.

Cela donne $y=\dfrac{1000-19x}{13}=76-x+\dfrac{12-6x}{13}$.

Par conséquent $12-6x$ *est divisible par 13, donc* $2-x$ *l'est.*

D'où $x=2$ *car* $2-x$ *est un entier naturel donc positif et par conséquent* $y=74$.

Il y avait donc 2 hommes et 74 femmes, j'ai vérifié, ça marche.

Élève 2

J'ai écrit l'algorithme ci-dessous et je l'ai testé :

```
pour x allant de 1 à 52 faire
    pour y allant de 1 à 52 faire
        si 19 * x + 13 * y = 1000 alors
            Afficher (x, y)
        fin
    fin
fin
```

J'obtiens comme affichage : (28,36) et (41,17).

J'ai vérifié ces résultats et c'est bon mais je ne pense pas que ce soit une démonstration.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité mathématiques.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *arithmétique*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices devra permettre de développer la compétence « modéliser ».